Unidad I

Números complejos.

Los **números complejos** son una extensión de los números reales y forman el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado que los contiene. El conjunto de los números complejos se designa como $\mathbb{C}$, siendo $\mathbb{R}$ el conjunto de los reales se cumple que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Los números complejos incluyen todas lasraíces de los polinomios, a diferencia de los reales. Todo **número complejo** puede representarse como la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra **i**), o en forma polar.

Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra, análisis, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, ecuaciones diferenciales, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia. Además los números complejos se utilizan por doquier en matemáticas, en muchos campos de la física (notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y lastelecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

En matemáticas, estos números constituyen un cuerpo y, en general, se consideran como puntos del plano: el plano complejo. Una propiedad importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra — pero que se demuestra aún en un curso de variable compleja —, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado *n* tiene exactamente n soluciones complejas. Contienen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana. Los análogos del cálculo diferencial eintegral con números complejos reciben el nombre de variable compleja o análisis complejo.

1.1 Definición y origen de los números complejos.

Los números complejos z se pueden definir como pares ordenados

$$z = (x, y)$$

de números reales x e y, con las operaciones de suma y producto que especificaremos más adelante. Se suelen identificar los pares (x, 0) con los números reales x.

La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I antes de Cristo, como resultado de una imposible sección de una pirámide. Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Tartaglia, Cardano.

Aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. El término imaginario para estas cantidades fue acuñado por Descartes en el Siglo XVII y está en desuso. La existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta la más abajo mencionada interpretación geométrica que fue descrita por Wessel en 1799, redescubierta algunos años después y popularizada por Gauss. La implementación más formal, con pares de números reales fue dada en el Siglo XIX.

1.2 Operaciones fundamentales con números complejos.

Varias propiedades de la suma y del producto de números complejos coinciden con las de los números reales. Recogeremos aquí las más básicas y verificamos algunas de ellas.

Las leyes conmitativas

$z1 + z2 = z2 + z1, \quad z1z2 = z2z1$

y las asociativas

$(z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3), \quad (z1z2)z3 = z1(z2z3)$

se siguen fácilmente de las definiciones de la suma y el producto de números complejos, y del hecho de que los números reales las satisfacen. Por ejemplo, si

$z1 = (x1, y1)$ y $z2 = (x2, y2)$,

entonces

$$z1 + z2 = (x1, y1) + (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2) = (x2 + x1, y2 + y1) = (x2, y2) + (x1, y1) = z2 + z1$$

La verificación de las restantes, así como de la ley distributiva

$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$,

es similar.

De acuerdo con la ley conmutativa del producto, $iy = yi$; luego está permitido escribir

$z = x + iy$ o $z = x + yi$

Además, por las leyes asociativas, una suma $z_1 + z_2 + z_3$ o un producto $z_1z_2z_3$ están bien definidos sin paréntesis, igual que ocurría con los números reales.

La identidad aditiva $0 = (0, 0)$ y la idenidad multiplicativa $1 = (1, 0)$ de los números reales se transfieren al sistema de los números complejos. O sea,

$z + 0 = z$ y $z * 1 = z$

para todo número complejo z. Más aún, 0 y 1 son los únicos números complejos con tales propiedades. Para establecer la unicidad de 0, supongamos que (u, v) es una identidad aditiva, y escribamos

$(x, y) + (u, v) = (x, y)$,

donde (x, y) es cualquier número complejo. Se deduce que

$x + u = x$ e $y + v = y$;

o sea, $u = 0$ y $v = 0$. El número complejo $0 = (0, 0)$ es, por tanto, la única identidad aditiva.

Cada número complejo $z = (x, y)$ tiene asociado un inverso aditivo

$-z = (-x, -y)$

que satisface la ecuación $z + (-z) = 0$. Además, hay un sólo inverso aditivo para cada z, pues la ecuación $(x, y) + (u, v) = (0,0)$ implica que $u = -x$ y $v = -y$.

Los inversos aditivos se usan para definir la resta:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Luego si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$z1 - z2 = (x1 - x2, y1 - y2) = (x1 - x2) + i(y1 - y2)$.

Análogamente, para todo número complejo $z = (x, y)$ no nulo, existe un número complejo $z-1$ tal que $zz-1 = 1$. Este inverso multiplicativo es menos obvio que el aditivo. Para hallarlo, buscamos números reales u, v expresados en términos de x e y, tales que

$(x, y)(u, v) = (1,0)$.

1.3 Potencias de "i", módulo o valor absoluto de un número complejo.

El valor absoluto, módulo o magnitud de un número complejo z viene dado por la siguiente expresión:

Si pensamos en z como algún punto en el plano; podemos ver, por el teorema de Pitágoras, que el valor absoluto de un número complejo coincide con la distancia euclídea desde el origen del plano.

Si el complejo está escrito en forma exponencial $z = r\ ei\varphi$, entonces $|z| = r$. Se puede expresar en forma polar como $z = r\ (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$, donde $\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi = ei\varphi$ es la conocida fórmula de Euler.

Podemos comprobar con facilidad estas cuatro importantes propiedades del valor absoluto

para cualquier complejo z y w.

Por definición, la función distancia queda como sigue $d(z, w) = |z - w|$ y nos provee de un espacio métrico con los complejos gracias al que se puede hablar de límites y continuidad. La suma, la resta, la multiplicación y la división de complejos son operaciones continuas. Si no se dice lo contrario, se asume que ésta es la métrica usada en los números complejos.

1.4 Forma polar y exponencial de un número complejo.

Forma Polar

Sean r y θ coordenadas polares del punto (x, y) que corresponde a un número complejo no nulo $z = x + iy$. Como

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

z puede ser expresado en forma polar como

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

En análisis complejo, no se admiten r negativos; sin embargo, como en el Cálculo, θ tiene infinitos valores posibles, incluyendo valores negativos.

Forma exponencial

La ecuación $ei\theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$
que define el simbolo eiθ, o exp (iθ), para todo valor real de θ, se conoce como fórmula de Euler.
Si escribimos un número complejo no nulo en forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

la fórmula de Euler permite expresar z más compactamente en forma exponencial:
$z = rei\theta$

1.5 Teorema de De Moivre, potencias y extracción de raíces de un número complejo.

Potencias de números complejos

Las potencias enteras de un número complejo no nulo $z = rei\theta$ vienen dadas por

$$z = rnein\theta \ (n = 0, +1, -1, +2, -2 \ldots)$$

Como $zn+1 = zzn$ cuando n=1,2,..., esto se comprueba fácilmente para valores positivos de n por inducción, para el producto de números complejos en forma exponencial. La ecuación es válida también para n = 0 con el convenio de que $z0 = 1$. Si n = -1, -2..., por otro lado, definimos zn en términos del inverso multiplicativo de z escribiendo $zn = (z-1)m$, donde $m = -n = 1, 2, \ldots$ Entonces, como la ecuación $z = rnein\theta$ es válida para potencias enteras positivas, se sigue de la forma exponencial de z-1 que

$$zn = [1/r\ ei(-\theta)]m = (1/r)m\ eim(-\theta) = rnein\theta$$

Por tanto, la ecuación $z = rnein\theta$ es válida para toda potencia entera.

Nótese que si r = 1, $z = rnein\theta$ se convierte en

$$(ei\theta)n = ei\theta n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

Cuando se expresa en la forma

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

que se le conoce como la fórmula de De Moivre

1.6 Ecuaciones polinómicas.

Los números complejos surgen ante la imposibilidad de hallar todas las soluciones de las ecuaciones polinómicas de tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Dados los valores apropiados de los coeficientes an a a0 , esta ecuación tendrá n soluciones reales si que permitirán reescribir el polinomio de la siguiente forma:

$$(x - s_n)(x - s_{n-1}) \cdots (x - s_1) = 0$$

Sin embargo, ecuaciones incluso tan sencillas como x2 + 1 = 0 desafían esta regla, ya que su solución, que teóricamente vendría dada por

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

que no existe en el campo de los reales ya que la raíz cuadrada no está definida para argumentos negativos.

Los números complejos sin embargo permiten ampliar aún más el concepto de "número", definiendo la unidad imaginaria o i como i = raíz de -1, lo que significaría que la ecuación anterior sí tendría dos soluciones, que serían x1= i y x2= - i.

La introducción de los números complejos permite probar el teorema fundamental del álgebra, que dice que cualquier ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n soluciones complejas.

De esta manera, se define genéricamente un número complejo como un número compuesto por dos partes, una parte real a y una parte imaginaria b, escribiéndose como sigue: z = a + bi.

Por ejemplo, 2-3i, 4+8i, 3-πi, etc.

Con los números complejos se opera como se operaría con productos de sumas ordinarios, teniendo en cuenta siempre que i2 = -1: (a + bi)(c + di) = ac +adi +bci + bdi2 = (ac - bd) + (ad+bc)i.

La división es un poco más sofisticada debido a la necesidad de eliminar la unidad imaginaria del de nominador de la fracción:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-adi}{c^2+d^2}$$